数 学 年 刊
2007,28A(1):39–48

用 quiver 构造拟三角 Hopf 代数***

王艳华*　叶　郁**

提要 利用 quiver 方法确定了一个广义 Taft 代数具有拟三角 Hopf 结构当且仅当它是 Sweedler 4 维 Hopf 代数. 用不同于文 [15] 的方法, 对任意的正整数 n, 构造出一类拟三角 Hopf 代数 $H(n)$.

关键词 quiver，路余代数，拟三角 Hopf 代数
MR (2000) 主题分类 16G20, 16W30
中图法分类 O153.3
文献标识码 A
文章编号 1000-8314(2007)01-0039-10

1 引　言

设 H 是域 k 上的 Hopf 代数, 若存在 $H\otimes H$ 中的可逆元 $R=\sum a_i\otimes b_i$ 满足 (见 [8]):

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(x)R=R\Delta(x),\quad \forall x\in H,$$
$$(\Delta\otimes \mathrm{id}_H)R=R^{13}R^{23},$$
$$(\mathrm{id}_H\otimes\Delta)R=R^{13}R^{12},$$

其中 $R^{12}=\sum\limits_i a_i\otimes b_i\otimes 1, R^{13}=\sum\limits_i a_i\otimes 1\otimes b_i, R^{23}=\sum\limits_i 1\otimes a_i\otimes b_i$, 则称 (H,R) 是一个拟三角 Hopf 代数, R 称为 H 的泛 R-矩阵.

Drinfeld 发现一个拟三角 Hopf 代数的泛 R-矩阵 R 给出了量子 Yang-Baxter 方程 (QYBE)

$$R^{12}R^{13}R^{23}=R^{23}R^{13}R^{12}$$

的一个解; 同时对于任意 H-模 V,R 也给出了 V 上经典 Yang-Baxter 方程 (YBE)

$$(c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes\mathrm{id})=(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)$$

的一个解 $c=c_V^R$, 其中 c_V^R 是由

$$c_V^R(v\otimes w)=\tau_V(R(v\otimes w)),\quad \forall v\otimes w\in V\otimes V$$

给出的 $V\otimes V$ 上的可逆线性变换, 而 τ_V 是通常的扭结映射, 即对任意 $u\otimes v\in V\otimes V$, $\tau_V(u\otimes v)=v\otimes u$.

Drinfeld 还给出了构造一类拟三角 Hopf 代数的方法: Drinfeld Double 方法. 对任意有限维的 Hopf 代数 H, 考察线性空间 $D(H):=H\otimes H^{*,\mathrm{cop}}$, 则 $D(H)$ 上有一个自然的张量代数和张量余代数结构, 但这两个结构并不相容成为一个 Hopf 代数. Drinfeld 指出我们可以保持 $D(H)$ 上的张量余乘结构, 而对其张量乘法作 twisting 得到一个新的乘法, 在新的乘法下, $D(H)$ 成为一个 Hopf 代数, 这个 Hopf 代数称为 H 的 Drinfeld double, 仍然记做 $D(H)$.

本文 2006 年 4 月 28 日收到.
*上海财经大学应用数学系, 上海 200433. E-mail: yhwgm@fudan.edu.cn
**中国科学技术大学数学系, 合肥 230026. E-mail: yeyu@ustc.edu.cn
***国家自然科学基金 (No. 10501041, No. 10271113) 和安徽省自然科学基金 (No. 2004Kj352) 资助的项目.

$D(H)$ 具有拟三角 Hopf 代数结构并且其泛 R-矩阵可具体写出来 (见 [9, 12]), 但并不是所有的拟三角 Hopf 代数都是某个 Hopf 代数的 Drinfeld Double, 例如 Radford 就曾研究过一些不是 Drinfeld doubles 的拟三角 Hopf 代数的性质 (见 [16]). 然而, 这类拟三角 Hopf 代数的例子是很少的, 事实上, 对某个具体的 Hopf 代数, 要给出它上面的一个具体的泛 R-矩阵是很困难的.

设 H_4 是 Sweedler 4 维 Hopf 代数, 即 H_4 有一组基 $\{1, g, x, gx\}$, 其 Hopf 代数结构由下式给出:

$$g^2=1,\quad x^2=0,\quad xg=-gx;\quad \Delta(g)=g\otimes g,\quad \Delta(x)=x\otimes 1+g\otimes x;$$
$$\epsilon(g)=1,\quad \epsilon(x)=0;\qquad S(g)=g,\quad S(x)=-gx.$$

H_4 具有拟三角 Hopf 代数结构, 其泛 R-矩阵为

$$R(\lambda)=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes g+g\otimes 1-g\otimes g)+\frac{\lambda}{2}(x\otimes x-x\otimes gx+gx\otimes x+gx\otimes gx),$$

其中 $\lambda\in K$; 并且当 λ 取遍 K 时, $R(\lambda)$ 给出了 H_4 的所有泛 R-矩阵 (见 [16, 17]). 值得注意的是若 $\lambda\neq 0$, 则 (H_4, R_λ) 不可能是某个 Hopf 代数的 Drinfeld double.

H_4 可看作是路余代数 KQ^c 的一个子余代数, 其中 Q 是具有两个顶点 1 和 g, 两个箭向 (一个 1 到 g 的箭向 x, 一个 g 到 1 的箭向 gx) 的 quiver. 事实上, H_4 恰好是由长度至多为 1 的道路构成的路余代数 KQ^c 的子余代数. 有关路余代数的内容可参见 [5]; 而对于路余代数 KQ^c 何时具有 Hopf 结构, Cibils 和 Rosso 也给出了完全的解答 (见 [7]); 至于其它利用 quiver 构造 Hopf 结构或类 Hopf 结构 (例如, 双-Frobenius 代数) 等方面的工作, 可详见文 [3, 4, 6, 10, 14, 21]. 这些工作启发我们可以用 quiver 来构造拟三角 Hopf 代数并具体地给出其泛 R-矩阵.

广义 Taft 代数这个名词最早出现在文 [11] 中, 是 Taft 代数的一种推广. 广义 Taft 代数是一类基本的 Hopf 代数, 它是由群样元 g 和本原元 x 生成并满足一定关系的代数 (见 [11]). 作为余代数, 广义 Taft 代数恰为基本圈上路余代数的子余代数. 本文证明了广义 Taft 代数具有拟三角结构的充要条件是它是一个 4 维 Hopf 代数 H_4(第 2 节).

Panaite 和 Van Oystaeyen 给出了维数为 2^{n+1} 的 pointed Hopf 代数的拟三角结构 (见 [15]), 我们记它为 $H(n)$. 从 quivers 的观点来看, 视 $H(n)$ 为有两个顶点 1 和 g, n 个 1 到 g 的箭向 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, n 个 g 到 1 的箭向 gx_i 的 quiver. 这可视为 Sweedler 的 4 维 Hopf 代数的推广. 运用 quiver 技巧, 也得到了 $H(n)$ 的拟三角结构. 这也提供了一类极小拟三角结构 (见 [16]). 虽然这里得到的拟三角结构包含在文 [15] 中, 但是我们提供了一种构造拟三角 Hopf 代数的新方法. 详细内容见第 3 节. 有关 Hopf 代数的详细知识可参见 Sweedler [19] 和 Motgomery [13]. Quivers 的内容可参见 Auslander-Reiten-Smalø [1] 和 Ringel [18]. 本文中所有张量积都是定义在域 K 上的.

2 广义 Taft 代数上的拟三角 Hopf 代数结构

设 Z_n 是长度为 n 的基本圈, 即 Z_n 有 n 个顶点 $e_0,\cdots,e_{n-1}$ 且 $\forall i\in\mathbb{Z}$, 存在唯一一个以 e_i 为起点的箭向 a_i, 其中 a_i 终点为 e_{i+1}, 这里视 e_i 和 e_{n+i} 为同一顶点. 令 $\gamma_i^m:=a_{i+m-1}\cdots a_{i+1}a_i$ 是起点为 e_i 长为 m 的道路, 注意到 $\gamma_i^0=e_i$ 和 $\gamma_i^1=a_i$.

令 $q\in K$ 为一个 n 次单位根. 对非负整数 l 和 m, 其 q-形式 Gaussian 二项式系数定义为

$$\binom{m+l}{l}_q := \frac{(l+m)!_q}{l!_q m!_q},$$

这里 $l!_q := 1_q\cdots l_q$, $0!_q := 1$, $l_q := 1+q+\cdots q^{l-1}$.

对 n 次单位根 $q\in K$, 在文 [7] 中, Cibils 和 Rosso 在路余代数 kZ_n^c 上定义了一个分次的 Hopf 代数结构 $KZ_n(q)$ (以长度分次):

$$\gamma_i^l\gamma_j^s = q^{lj}\binom{l+s}{l}_q\gamma_{i+j}^{l+s},\quad \Delta(\gamma_i^l)=\sum_{s=0}^{l}\gamma_{i+s}^{l-s}\otimes\gamma_i^s,\quad \epsilon(\gamma_i^l)=\delta_{0,l},$$
$$S(\gamma_i^l) = (-1)^l q^{-\frac{l(l+1)}{2}-il}\gamma_{n-l-i}^l,$$

这里 δ 是 Kronecker 符号.

令 $C_d(n)$ 是 KZ_n^c 的子余代数, 它有一组由所有长度严格小于 d 的道路组成的基. 观察到, 如果 q 的阶是 d, 则对 $1\leqslant l\leqslant d-1$, 有 $\binom{d}{l}_q=0$. 因此 $C_d(n)$ 是 $KZ_n(q)$ 的子 Hopf 代数. 记这个分次的子 Hopf 结构为 $C_d(n,q)$. 注意到 $C_2(2,-1)$ 恰好给出熟知的 Sweedler 4 维 Hopf 代数 H_4. 文 [4] 中定理 3.6 证明了, 如果 K 是一个特征为 0 的域且包含一个 n 次本原单位根, 则在路余代数 $C_d(n)$ 上有 Hopf 代数结构当且仅当 $d|n$, 且其上任意分次的 Hopf 代数结构 (以长度分次) 都由某个 $C_d(n,q)$ 给出, 其中 q 为 d 次本原单位根.

设 d 是 n 次单位根 q 的乘法阶. 令 $A_{n,d}(q)$ 是由 g 和 x 生成的结合代数, 满足如下关系:

$$g^n=1,\quad x^d=0,\quad xg=qgx,$$

则 $A_{n,d}(q)$ 是一个 Hopf 代数, 其余乘 Δ, 余单位 ϵ 和对极 S 如下:

$$\begin{array}{ll}\Delta(g)=g\otimes g, & \epsilon(g)=1,\\ \Delta(x)=x\otimes 1+g\otimes x, & \epsilon(x)=0,\\ S(g)=g^{-1}=g^{n-1}, & S(x)=-g^{-1}x.\end{array}$$

特别地, 若 q 是 n 次本原单位根 (即 $d=n$), 则 $A_{n,d}(q)$ 恰为 Taft 在文 [20] 中引入的 n^2 维 Hopf 代数. 这也是 $A_{n,d}(q)$ 被称为广义 Taft 代数 (见 [11]) 的原因.

观察到 $C_d(n,q)$ 作为代数是由 e_1 和 a_0 生成的. 将 g 映到 e_1, x 映到 a_0, 就得到一个 Hopf 代数同构 $A_{n,d}(q)\cong C_d(n,q)$.

本节主要研究 $C_d(n,q)$ 的拟三角性, 有

定理 2.1　设 K 是一个特征为 0 的域. $q\in K$ 是一个 n 次单位根, 它的阶 $d\geqslant 2$. 则 $C_d(n,q)$ 是拟三角 Hopf 代数当且仅当它是 Sweedler 4 维 Hopf 代数 H_4.

证　令 $R=\sum\limits_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\ 0\leqslant l,s\leqslant d-1}} f_{i,j}^{l,s}\gamma_i^l\otimes\gamma_j^s$ 是 $C_d(n,q)$ 的一个泛 R-矩阵, 则有

$$\begin{aligned}\Delta^{\rm cop}(\gamma_0^1)R &= (\gamma_0^0\otimes\gamma_0^1+\gamma_0^1\otimes\gamma_1^0)\Big(\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\ 0\leqslant l,s\leqslant d-1}} f_{i,j}^{l,s}\gamma_i^l\otimes\gamma_j^s\Big)\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\ 0\leqslant l,s\leqslant d-1}} f_{i,j}^{l,s}q^j(s+1)_q\gamma_i^l\otimes\gamma_j^{s+1}+\sum f_{i,j}^{l,s}q^i(l+1)_q\gamma_i^{l+1}\otimes\gamma_{j+1}^s,\end{aligned}$$

且

$$R\Delta(\gamma_0^1) = \Big(\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\0\leqslant l,s\leqslant d-1}} f_{i,j}^{l,s}\gamma_i^l\otimes\gamma_j^s\Big)\Big(\gamma_0^1\otimes\gamma_0^0+\gamma_1^0\otimes\gamma_0^1\Big)$$
$$= \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\0\leqslant l,s\leqslant d-1}} f_{i,j}^{l,s}(l+1)_q\gamma_i^{l+1}\otimes\gamma_j^s + \sum f_{i,j}^{l,s}q^l(s+1)_q\gamma_{i+1}^l\otimes\gamma_j^{s+1}.$$

比较 $\gamma_i^l\otimes\gamma_j^s$ 的系数，有

$$q^j f_{i,j}^{l,s-1}s_q + q^i f_{i,j-1}^{l-1,s}l_q = f_{i,j}^{l-1,s}l_q + q^l f_{i-1,j}^{l,s-1}s_q.$$

分别取 $l=0,\ s=1$, 和 $l=1,\ s=0$, 有

$$q^j f_{i,j}^{0,0} = f_{i-1,j}^{0,0},\quad q^i f_{i,j-1}^{0,0} = f_{i,j}^{0,0}. \tag{2.1}$$

得到 $f_{1,0}^{0,0}=f_{2,0}^{0,0}=\cdots=f_{n-1,0}^{0,0}=f_{0,0}^{0,0}=f_{0,1}^{0,0}=f_{0,2}^{0,0}=\cdots=f_{0,n-1}^{0,0}$. 由于 $qf_{1,1}^{0,0}=f_{0,1}^{0,0}$ 和 $f_{1,1}^{0,0}=qf_{1,0}^{0,0}$, 所以 $q^2=1$ 或 $f_{1,0}^{0,0}=0$. 但是 $f_{1,0}^{0,0}=0$ 蕴含着 $f_{i,j}^{0,0}=0$, $i,j\in\mathbb{Z}_n$. 由于 R 是可逆的，q 的阶 d 不小于 2, 所以 $q=-1$, $d=2$.

又由 (2.1) 观察到

$$f_{i,j}^{0,0}=(-1)^j f_{i-1,j}^{0,0}=\cdots=(-1)^{ij}f_{0,j}^{0,0}=(-1)^{ij}f_{0,0}^{0,0}.$$

令 $f_{0,0}^{0,0}=c\in K$. 则 $c\neq 0$ 且 $f_{i,j}^{0,0}=(-1)^{ij}c$. 由于 $C_d(n)$ 是一个 Hopf 代数当且仅当 $d\mid n$ (见 [4, 定理 3.1]), 所以 n 是偶数.

注意到 $H:=C_d(n,q)$ 是一个关于长度分次的代数. 在下面方程的两边，比较 $H_0\otimes H_0\otimes H_0$ 中的项

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})R = \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\0\leqslant l,s\leqslant d-1}} f_{i,j}^{l,s}\sum_{r=0}^{l}\gamma_{i+r}^{l-r}\otimes\gamma_i^r\otimes\gamma_j^s$$
$$= R^{13}R^{23} = \sum_{\substack{0\leqslant a,b,x,y\leqslant n-1\\0\leqslant u,v,m,t\leqslant d-1}} f_{a,b}^{u,v}f_{x,y}^{m,t}\gamma_a^u\otimes\gamma_x^m\otimes\gamma_b^v\gamma_y^t,$$

这里 H_0 表示次数为 0 的齐次分支，得到

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_n} f_{i,j}^{0,0}\gamma_i^0\otimes\gamma_i^0\otimes\gamma_j^0 = \sum_{a,b,x,y\in\mathbf{Z}_n} f_{a,b}^{0,0}f_{x,y}^{0,0}\gamma_a^0\otimes\gamma_x^0\otimes\gamma_b^0\gamma_y^0,$$

即

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_n}(-1)^{ij}c\gamma_i^0\otimes\gamma_i^0\otimes\gamma_j^0 = \sum_{a,b,x,y\in\mathbf{Z}_n}(-1)^{ab+xy}c^2\gamma_a^0\otimes\gamma_x^0\otimes\gamma_b^0\gamma_y^0. \tag{2.2}$$

我们证明 $n=2$. 否则，因为 n 是偶数，故 $n\geqslant 4$. 通过比较 (2.2) 两边项 $\gamma_2^0\otimes\gamma_4^0\otimes\gamma_0^0$ 的系数，得到矛盾：

$$0=\sum_{b,y\in\mathbf{Z}_n,b+y=0}c^2=nc^2\neq 0.$$

又比较 (2.2) 两边 $\gamma_0^0\otimes\gamma_0^0\otimes\gamma_0^0$ 的系数，得到 $c=\frac{1}{2}$. 至此，我们已经证明了 $H=C_2(2,-1)=H_4$. 熟知 H_4 的泛 R-矩阵为

$$R=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes g+g\otimes 1-g\otimes g)+\frac{\lambda}{2}(x\otimes x-x\otimes gx+gx\otimes x+gx\otimes gx),$$

其中 $\lambda\in K$ (见 [13, p. 184]).

3 一类拟三角 Hopf 代数

本节取 K 是特征不为 2 的域.

对任意正整数 n, 令 $H(n)$ 是由 g, x_i, $1\leqslant i\leqslant n$ 生成的 Hopf 代数，满足如下关系：

$$g^2=1,\ x_i^2=0,\ gx_i=-x_ig,\ x_ix_j=-x_jx_i,\ \ 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

注意到 $H(1)$ 正是 Sweedler 的 4 维 Hopf 代数 H_4. $H(n)$ 是群代数 KZ_2 和具有 n 个生成子的外代数的张量积. 定义 g 的次数是 $0, x_i$ 的次数是 1. 则由 g 和 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 生成的自由代数是一个分次代数. 由于 $H(n)$ 的定义关系是齐次的，所以 $H(n)=\bigoplus\limits_{0\leqslant i\leqslant n}H(n)_i$ 是分次代数，其中齐次元 $H(n)_m$ 是基为

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\ gx_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\ \ 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n$$

的空间.

令 Q 是由顶点 1 和 g,n 个 1 到 g 箭向 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 和 n 个 g 到 1 的箭向 gx_i 生成的 quiver. 若把 $H(n)$ 看作路余代数 KQ^c 的子余代数，我们要注意到 $H(n)$ 中的乘积不再是道路的连接，而是由 KQ_1 的 KQ_0-Hopf 双模结构决定的积，其中 KQ_0 是以 Q 的顶点集为基的向量空间，KQ_1 是以 Q 的箭向集为基的向量空间 (见 [7]).

引理 3.1　设 n 是任意正整数，则 $H(n)$ 是 2^{n+1} 维分次 Hopf 代数，其余乘为

$$\Delta(g)=g\otimes g,\quad \Delta(x_i)=x_i\otimes 1+g\otimes x_i,$$

余单位为 $\epsilon(g)=1,\quad \epsilon(x_i)=0$, 对极为 $S(g)=g,\ S(x_i)=-gx_i$.

证　由文 [2] 知，$H(n)$ 是 Hopf 代数，并且作为代数是分次的. 显然 $H(n)$ 也是一个分次的余代数，所以 $H(n)$ 是分次的 Hopf 代数.

令 $y_i:=gx_i$. 则有

$$x_ix_i=y_iy_i=0,\quad x_ix_j=-x_jx_i=-y_iy_j=y_jy_i,\quad x_iy_j=-x_jy_i=y_jx_i=-y_ix_j,$$

$$\Delta(y_i)=1\otimes y_i+y_i\otimes g,\quad \epsilon(x_i)=0,\quad S(y_i)=x_i.$$

定理 3.1　设 n 是任意正整数，则 $H(n)$ 是拟三角 Hopf 代数，其泛 R-矩阵为

$$\begin{aligned}R(n)=&\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes g+g\otimes 1-g\otimes g)\\&+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}(x_i\otimes x_j-x_i\otimes y_j+y_i\otimes x_j+y_i\otimes y_j),\end{aligned}$$

其中 $a_{i,j}\in K$ 满足 $a_{ij}a_{st}=a_{it}a_{sj},\ 1\leqslant i,j,s,t\leqslant n,\ i\neq s,\ j\neq t.$

特别地，当 $k\leqslant n$ 时，$R(k)$ 是 $H(n)$ 的泛 R-矩阵.

证　易知

$$\begin{aligned}(S\otimes \mathrm{id})R(n)=&\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes g+g\otimes 1-g\otimes g)\\&+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}(-y_i\otimes x_j+y_i\otimes y_j+x_i\otimes x_j+x_i\otimes y_j)\end{aligned}$$

是 $R(n)$ 的逆.

首先证明形式为

$$R=a_1(1\otimes 1)+a_2(1\otimes g)+a_3(g\otimes 1)+a_4(g\otimes g)$$

的泛 R-矩阵是唯一的，即 $R=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes g+g\otimes 1-g\otimes g)$.

事实上，有

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\mathrm{id})R&=(\Delta\otimes\mathrm{id})(a_1(1\otimes 1)+a_2(1\otimes g)+a_3(g\otimes 1)+a_4(g\otimes g))\\&=a_1(1\otimes 1\otimes 1)+a_2(1\otimes 1\otimes g)+a_3(g\otimes g\otimes 1)+a_4(g\otimes g\otimes g),\\R^{13}R^{23}&=(a_1(1\otimes 1\otimes 1)+a_2(1\otimes 1\otimes g)+a_3(g\otimes 1\otimes 1)+a_4(g\otimes 1\otimes g))\\&\quad(a_1(1\otimes 1\otimes 1)+a_2(1\otimes 1\otimes g)+a_3(1\otimes g\otimes 1)+a_4(1\otimes g\otimes g))\\&=a_1^2(1\otimes 1\otimes 1)+a_1a_2(1\otimes 1\otimes g)+a_1a_3(1\otimes g\otimes 1)+a_1a_4(1\otimes g\otimes g)\\&\quad+a_2a_1(1\otimes 1\otimes g)+a_2^2(1\otimes 1\otimes 1)+a_2a_3(1\otimes g\otimes g)+a_2a_4(1\otimes g\otimes 1)\\&\quad+a_3a_1(g\otimes 1\otimes 1)+a_3a_2(g\otimes 1\otimes g)+a_3^2(g\otimes g\otimes 1)+a_3a_4(g\otimes g\otimes g)\\&\quad+a_4a_1(g\otimes 1\otimes g)+a_4a_2(g\otimes 1\otimes 1)+a_4a_3(g\otimes g\otimes g)+a_4^2(g\otimes g\otimes 1).\end{aligned}$$

由 $(\Delta\otimes\mathrm{id})R=R^{13}R^{23}$ 得到

$$\begin{cases}a_1=a_1^2+a_2^2,\\a_2=2a_1a_2,\\a_3=a_3^2+a_4^2,\\a_4=2a_3a_4,\\a_1a_3+a_2a_4=a_1a_4+a_2a_3=0.\end{cases}$$

这样 (a_1,a_2,a_3,a_4) 为

$$(1,0,0,0),\ (0,0,1,0),\ \left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ 0,0\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right),\ \left(0,0,\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right).\qquad(*)$$

相似地，由 $(\mathrm{id}\otimes\Delta)R=R^{13}R^{12}$ 得到

$$\begin{cases}a_1=a_1^2+a_3^2,\\a_2=a_2^2+a_4^2,\\a_3=2a_1a_3,\\a_4=2a_2a_4,\\a_1a_2+a_3a_4=a_1a_4+a_2a_3=0,\end{cases}$$

则 (a_1,a_2,a_3,a_4) 为

$$(1,0,0,0),\ \ (0,1,0,0),\ \ \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \pm\frac{1}{2},\ 0\right),\ \ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right),\ \ \left(0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \pm\frac{1}{2}\right).\quad(**)$$

比较 $(*)$ 和 $(**)$ 得到

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(1,0,0,0)\quad\text{或}\quad\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),$$

所以 $R=1\otimes 1$ 或 $R=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes g+g\otimes 1-g\otimes g)$.

要证明 $\Delta^{\mathrm{cop}}(x)R=R\Delta(x)$, $\forall x\in H(n)$, 只要证明对 $H(n)$ 的生成子 $g,x_i,1\leqslant i\leqslant n$ 成立即可．这是容易证明的．

下面我们来决定形式为 $R=R_0+R_2$ 的泛 R-矩阵，其中

$$\begin{aligned}R_0&=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes g+g\otimes 1-g\otimes g),\\R_2&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{ij}x_i\otimes x_j+b_{ij}x_i\otimes y_j+c_{ij}y_i\otimes x_j+d_{ij}y_i\otimes y_j).\end{aligned}$$

因为 R_0 是泛 R-矩阵，所以如果 R_0+R_2 是泛 R-矩阵当且仅当下列条件满足

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})R_2=R_0^{13}R_2^{23}+R_2^{13}R_0^{23}+R_2^{13}R_2^{23}, \tag{3.1}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)R_2=R_0^{13}R_2^{12}+R_2^{13}R_0^{12}+R_2^{13}R_2^{12}, \tag{3.2}$$

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(g)R_2=R_2\Delta(g), \tag{3.3}$$

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(x_s)R_2=R_2\Delta(x_s),\quad 1\leqslant s\leqslant n. \tag{3.4}$$

由于

$$R_2^{13}R_2^{23}\in(H(n)\otimes H(n))_4,$$
$$R_0^{13}R_2^{23}+R_2^{13}R_0^{23},\ \ (\Delta\otimes\mathrm{id})R_2\in(H(n)\otimes H(n))_2,$$

其中 $(H(n)\otimes H(n))_4$ 和 $(H(n)\otimes H(n))_2$ 分别表示 $H(n)\otimes H(n)$ 的次数为 4 和 2 的齐次分支，则 (3.1) 成为

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})R_2=R_0^{13}R_2^{23}+R_2^{13}R_0^{23}, \tag{3.5}$$

$$R_2^{13}R_2^{23}=0. \tag{3.6}$$

我们有

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\mathrm{id})R_2=&\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{ij}x_i\otimes 1\otimes x_j+a_{ij}g\otimes x_i\otimes x_j+b_{ij}x_i\otimes 1\otimes y_j+b_{ij}g\otimes x_i\otimes y_j\\&+c_{ij}y_i\otimes g\otimes x_j+c_{ij}1\otimes y_i\otimes x_j+d_{ij}y_i\otimes g\otimes y_j+d_{ij}1\otimes y_i\otimes y_j),\\
R_0^{13}R_2^{23}+R_2^{13}R_0^{23}=&\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant s,t\leqslant n}(a_{st}1\otimes x_s\otimes x_t+b_{st}1\otimes x_s\otimes y_t+c_{st}1\otimes y_s\otimes x_t\\&+d_{st}1\otimes y_s\otimes y_t+a_{st}1\otimes x_s\otimes y_t+b_{st}1\otimes x_s\otimes x_t+c_{st}1\otimes y_s\otimes y_t\\&+d_{st}1\otimes y_s\otimes x_t+a_{st}g\otimes x_s\otimes x_t+b_{st}g\otimes x_s\otimes y_t+c_{st}g\otimes y_s\otimes x_t\\&+d_{st}g\otimes y_s\otimes y_t-a_{st}g\otimes x_s\otimes y_t-b_{st}g\otimes x_s\otimes x_t-c_{st}g\otimes y_s\otimes y_t\\&-d_{st}g\otimes y_s\otimes x_t+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{ij}x_i\otimes 1\otimes x_j+b_{ij}x_i\otimes 1\otimes y_j\\&+c_{ij}y_i\otimes 1\otimes x_j+d_{ij}y_i\otimes 1\otimes y_j-a_{ij}x_i\otimes 1\otimes y_j-b_{ij}x_i\otimes 1\otimes x_j\\&-c_{ij}y_i\otimes 1\otimes y_j-d_{ij}y_i\otimes 1\otimes x_j+a_{ij}x_i\otimes g\otimes x_j+b_{ij}x_i\otimes g\otimes y_j\\&+c_{ij}y_i\otimes g\otimes x_j+d_{ij}y_i\otimes g\otimes y_j+a_{ij}x_i\otimes g\otimes y_j+b_{ij}x_i\otimes g\otimes x_j\\&+c_{ij}y_i\otimes g\otimes y_j+d_{ij}y_i\otimes g\otimes x_j).\end{aligned}$$

比较 $(\Delta\otimes\mathrm{id})R_2$ 和 $R_0^{13}R_2^{23}+R_2^{13}R_0^{23}$，有

$$\begin{cases}a_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-b_{ij}),\\ b_{ij}=\frac{1}{2}(b_{ij}-a_{ij}),\\ c_{ij}=\frac{1}{2}(c_{ij}+d_{ij}),\\ d_{ij}=\frac{1}{2}(c_{ij}+d_{ij}),\\ a_{st}+b_{st}=0,\\ c_{st}-d_{st}=0.\end{cases} \tag{3.7}$$

因此，得到方程 (3.5) 的解

$$a_{ij}=-b_{ij},\ c_{ij}=d_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n. \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}R_2^{13}R_2^{23}=\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}&(a_{ij}a_{st}x_i\otimes x_s\otimes x_jx_t+a_{ij}b_{st}x_i\otimes x_s\otimes x_jy_t+a_{ij}c_{st}x_i\otimes y_s\otimes x_jx_t\\&+a_{ij}d_{st}x_i\otimes y_s\otimes x_jy_t+b_{ij}a_{st}x_i\otimes x_s\otimes y_jx_t+b_{ij}b_{st}x_i\otimes x_s\otimes y_jy_t\\&+b_{ij}c_{st}x_i\otimes y_s\otimes y_jx_t+b_{ij}d_{st}x_i\otimes y_s\otimes y_jy_t+c_{ij}a_{st}y_i\otimes x_s\otimes x_jx_t\\&+c_{ij}b_{st}y_i\otimes x_s\otimes x_jy_t+c_{ij}c_{st}y_i\otimes y_s\otimes x_jx_t+c_{ij}d_{st}y_i\otimes y_s\otimes x_jy_t\\&+d_{ij}a_{st}y_i\otimes x_s\otimes y_jx_t+d_{ij}b_{st}y_i\otimes x_s\otimes y_jy_t+d_{ij}c_{st}y_i\otimes y_s\otimes y_jx_t\\&+d_{ij}d_{st}y_i\otimes y_s\otimes y_jy_t.\end{aligned}$$

由 (3.8) 和 $x_jx_t=-x_tx_j=-y_jy_t=y_ty_j$, $x_jy_t=-x_ty_j=y_tx_j=-y_jx_t$, 有

$$\begin{aligned}R_2^{13}R_2^{23}=&\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}a_{ij}a_{st}x_i\otimes x_s\otimes(x_jx_t-x_jy_t-y_jx_t+y_jy_t)\\&+\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}a_{ij}c_{st}x_i\otimes y_s\otimes(x_jx_t+x_jy_t-y_jx_t-y_jy_t)\\&+\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}c_{ij}a_{st}y_i\otimes x_s\otimes(x_jx_t-x_jy_t+y_jx_t-y_jy_t)\\&+\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}c_{ij}c_{st}y_i\otimes y_s\otimes(x_jx_t+x_jy_t+y_jx_t+y_jy_t)\\=&\,2\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}a_{ij}c_{st}x_i\otimes y_s\otimes(x_jx_t-y_jx_t)\\&+2\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}c_{ij}a_{st}y_i\otimes x_s\otimes(x_jx_t-x_jy_t)\\=&\,2\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}a_{ij}c_{st}x_i\otimes y_s\otimes(1-g)x_jx_t\\&+2\sum_{1\leqslant i,j,s,t\leqslant n}c_{ij}a_{st}y_i\otimes x_s\otimes x_jx_t(1+g)\\=&\,2\sum_{1\leqslant i,s\leqslant n;j<t}(a_{ij}c_{st}-a_{it}c_{sj})x_i\otimes y_s\otimes(1-g)x_jx_t\\&+2\sum_{1\leqslant i,s\leqslant n;j<t}(c_{ij}a_{st}-c_{it}a_{sj})y_i\otimes x_s\otimes x_jx_t(1+g).\end{aligned}$$

因此方程 (3.6) 的解为

$$a_{ij}c_{st}=a_{it}c_{sj},\quad c_{ij}a_{st}=c_{it}a_{sj},\quad 1\leqslant i,s\leqslant n,\quad j<t,$$

即

$$a_{ij}c_{st}=a_{it}c_{sj},\quad 1\leqslant i,j,s,t\leqslant n,\quad j\neq t. \tag{3.9}$$

组合 (3.8) 和 (3.9), 得到方程 (3.1) 的解是

$$a_{ij}=-b_{ij},\quad c_{ij}=d_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n;\quad a_{ij}c_{st}=a_{it}c_{sj},\quad 1\leqslant i,j,s,t\leqslant n,\quad j\neq t. \tag{3.10}$$

由类似的计算得到方程 (3.2) 的解是

$$a_{ij} = c_{ij}, \quad -b_{ij} = d_{ij}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n; \quad a_{ij}b_{st} = a_{sj}b_{it}, \quad 1 \leqslant i,j,s,t \leqslant n, \quad i \neq s. \tag{3.11}$$

综上我们得到方程 (3.1) 和 (3.2) 的解是

$$a_{ij} = -b_{ij} = c_{ij} = d_{ij}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n; \quad a_{ij}a_{st} = a_{it}a_{sj}, \quad 1 \leqslant i,j,\ s,\ t \leqslant n, \quad i \neq s, \quad j \neq t.$$

所以得到 $R_2 = \sum_{i,j} a_{ij}(x_i \otimes x_j - x_i \otimes y_j + y_i \otimes x_j + y_i \otimes y_j)$, 其中 $a_{ij} \in K$ 满足 $a_{ij}a_{st} = a_{it}a_{sj}, 1 \leqslant i,j,\ s,\ t \leqslant n, i \neq s, j \neq t$. 易证 R_2 也满足方程 (3.3) 和 (3.4). 至此证明完成.

一个拟三角 Hopf 代数 (H,R) 的子拟三角 Hopf 代数是指一个拟三角 Hopf 代数 (H',R'), 使得 H' 是 H 的子 Hopf 代数且 $R = (i \otimes i)(R')$, 其中 $i: H' \hookrightarrow H$. 如果一个拟三角 Hopf 代数 (H,R) 没有真子拟三角 Hopf 代数，称这个拟三角 Hopf 代数是最小的. Radford [16] 研究了最小拟三角 Hopf 代数，证明了 Drinfeld double 是最小的拟三角 Hopf 代数；一个最小拟三角 Hopf 代数是有限维的并且是 Drinfeld double 的商 (见 [16]). Radford 在文 [16] 中也证明了每个拟三角 Hopf 代数 (H,R) 有一个唯一的最小的子拟三角 Hopf 代数 (H_R,R). 下面的命题证明了定理 3.1 中的拟三角 Hopf 代数是最小的，这里记 $(H(n),R(n)) = (H(n),R(n,a_{ij}))$.

命题 3.1 设 n 是任意正整数，则 $(H(n),R(n,a_{ij}))$ 是最小的拟三角 Hopf 代数，其中 $a_{ij} \neq 0, 1 \leqslant i,j \leqslant n$ (例如可以取 $a_{ij} = \lambda \neq 0, 1 \leqslant i,j \leqslant n$).

证 注意到一个拟三角 Hopf 代数 (H,R) 的唯一的最小子拟三角 Hopf 代数 (H_R,R) 是由 $R_l + R_r$ 生成的，其中 $R_l = (\mathrm{id} \otimes H^*)(R), R_r = (H^* \otimes \mathrm{id})(R)$, 且 (H,R) 是最小的当且仅当 $H = H_R$ (见 [16, p. 292]). 当 (H,R) 是 $(H(n),R(n,a_{ij}))$ 时，由于 $a_{ij} \neq 0, 1 \leqslant i,j \leqslant n$, 则 R_l 和 R_r 是 $H(n)$ 本身，这样 $(H(n),R(n,a_{ij}))$ 是最小的拟三角 Hopf 代数.

参 考 文 献

[1] Auslander M., Reiten I. and Smalø S. O., Representation theory of artin algebras [M]// Cambridge Studies in Adv. Math. 36, Cambridge Univ. Press, 1995.

[2] Caenepeel S. and Dascalescu S., On pointed Hopf algebras of dimension 2^n [J], *Bull. London Math. Soc.*, 1999, 31:17–24.

[3] Cibils C., A quiver quantum group [J], *Commun. Math. Phys.*, 1993, 157:459–477.

[4] Chen X. W., Huang H. L., Ye Y. and Zhang P., Monomial Hopf algebras [J], *J. Algebra*, 2004, 275:212–232.

[5] Chin W. and Montgomery S., Basic coalgebras, Modularinterfaces (Reverside, CA, 1995) [M]// 41-47, AMS/IP Stud. Adv. Math.4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[6] Cibils C. and Rosso M., Algebres des chemins quantique [J], *Adv. Math.*, 1997, 125:171–199.

[7] Cibils C. and Rosso M., Hopf quivers [J], *J. Algebra*, 2002, 254:241–251.

[8] Drinfeld V. G., Quantum groups [J], *Proc. Int. Cong. Math., Berkley, V.*, 1986, 1:789–820.

[9] Drinfeld V. G., On almost cocommutative Hopf algebras [J], *Leningrad Math. J.*, 1990, 1:321–342.

[10] Green E. L. and Solberg ø., Basic Hopf algebras and quantum groups [J], *Math. Z.*, 1998, 229:45–76.

[11] Huang H. L., Chen H. X. and Zhang P., Generalized taft algebras [J], *Algebra Colloquium, V.*, 2004, 11(3):313–320.

[12] Kassel C., Quantum Groups [M]// Graduate Texts in Math., 155, New York: Springer-Verlag, 1995.

[13] Montgomery S., Hopf algebras and their actions on rings [M]// CBMS Regional Conf. Serice in Math. 82, AMS. Providence, RI, 1993.

[14] van Oystaeyen F. and Zhang P., Quiver Hopf algebras [J], *J. Algebra*, 2004, 280:577–589.

[15] Panaite F. and Van Oystaeyen F., Quasitriangular structurefor some pointed Hopfalgebras of dimension 2^n [J], *Comm. Algebra*, 1999,27(10):4929–4942.

[16] Radford D. E., Minimal quasitriangular Hopf algebras [J], *J. Algrbra*, 1993, 157:157–285.

[17] Radford D. E., Quantum algebras, quantum coalgebras, invariants of 1-1 tangles and knots [J], *Comm. Algebra*, 2000, 28(11):5101–5156.

[18] Ringel C. M., Tame algebras and integral quadratic forms [M]// Lecture Notes in Math. 1099, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1984.

[19] Sweedler M. E., Hopf Algebras [M]// New York: Benjamin, 1969.

[20] Taft E. J., The order of the antipode of finitedimensional Hopf algebras [J], *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1971, 68:2631-2633.

[21] Wang Y. H. and Zhang P., Construct bi-Frobenius algebrasvia quivers [J], *Tsukuba J. Math. V.*, 2004, 28:215-221.

Construct Quasitriangular Hopf Algebras via Quivers

WANG Yanhua* YE Yu**

*Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Franance and Economics, Shanghai 200433, China, E-mail: yhwgm@fudan.edu.cn,

**Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, Anhui, China. E-mail: yeyu@ustc.edu.cn

Abstract By using the quiver technique it is proved that a generalized Taft algebra admits a quasitriangular Hopf structure if and only if it is Sweedler's 4dimensional Hopf algebra. Using different methods from [15]. Also a class of quasitriangular Hopf algebras $H(n)$ via quivers, for each positive integer n, is gived.

Keywords Quiver, Path coalgebra, Quasitriangular Hopf algebra
2000 MR Subject Classification 16G70, 16W30